

全国 2020 年 10 月高等教育自学考试

线性代数(经管类) 试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = a_1x + a_0$, 则 $a_0 =$

A. -7

B. -4

C. 4

D. 7

2. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行与第 3 行互换得到矩阵 B , 再将 B 的第 1 列的 (-2) 倍加到第 3 列得到单位矩阵 E , 则 $A =$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. 若向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -k \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2k \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则数 $k =$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4. 设线性方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解, 则数 $a =$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

5. 设 2 阶矩阵 A 满足 $|2E + 3A| = 0$, $|E - A| = 0$, 则 $|A + E| =$

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} =$ _____。

7. 设 3 阶矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若行列式 $|B| = -2$, 则行列式 $|3\beta_2, \beta_1, \beta_3 - 2\beta_1| =$ _____。

8. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - A - E = O$, 则 $A^{-1} =$ _____。(用矩阵 A 表示。)

9. 设 A 为 2 阶矩阵, 若存在矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

则 $A =$ _____。

10. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, 4)^T$, $\alpha_3 = (-1, 3, t)^T$ 线性无关, 则数 t 的取值应满足_____.

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & t \end{pmatrix}$, 若 3 阶非零矩阵 B 满足 $AB = O$, 则数 $t =$ _____.

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(A, b) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & c-2 & 0 \end{array} \right)$$

若该方程组有无穷多解且其导出组的基础解系有 2 个向量, 则数 a, c 的取值应分别满足_____.

13. 设 3 阶矩阵 A 有特征值为 3, 若矩阵 $B = A^2 - 2A + E$, 则 B 必有一个特征值为_____.

14. 已知 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是其一个特征向量, 则 α 对应的特征值为_____.

15. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定, 则数 t 的取值范围为_____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

16. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, 求

(1) 矩阵 X , 使得 $A + 2X = B$; (2) AX^T .

18. 设 3 阶矩阵 A 和 B 满足关系式 $ABA = 6A^2 + BA$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, 3, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, 1, 0, 4)^T$ 的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 确定数 k 的值, 使线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \\ kx_1 + 2x_2 + x_3 = k \end{cases}$$
 有无穷多解, 并求出其通解 (要求

用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 6, 3, 3, 已知特征值 6 对应的特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, 求矩阵 A .

22. 求正交变换 $x = Py$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 化为标准形

$$f = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2.$$

四、证明题: 本题 7 分。

23. 设 A 是 n 阶矩阵, n 维列向量 α 满足 $A\alpha \neq 0$, $A^2\alpha = 0$, 证明向量组 $\alpha, A\alpha$ 线性无关.