绝密 ★ 考试结束前

全国2021年4月高等教育自学考试

线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明:在本卷中,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵,$\boldsymbol{A}^*$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$是单位矩阵,$|\boldsymbol{A}|$表示方阵$\boldsymbol{A}$的行列式,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 已知4阶行列式D的某一行元素及其余子式都为a $(a\neq 0)$,则$D=$

A. 0　　B. a^2　　C. $-a^2$　　D. $4a^2$

2. 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,则

A. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$　　B. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}$　　C. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^3\boldsymbol{A}$　　D. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^4\boldsymbol{A}$

3. 设向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$长度依次为2和3,则向量$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$的内积$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=$

A. 13　　B. 6　　C. 5　　D. -5

4. 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解的充分必要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$的

A. 列向量组线性相关　　B. 列向量组线性无关

C. 行向量组线性相关　　D. 行向量组线性无关

5. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&0\\0&-5\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的关系为

A. 相似但不合同　　B. 合同但不相似

C. 合同且相似　　D. 不合同也不相似

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中元素$a_{ij}$的代数余子式为$A_{ij}$（$i,j=1,2$），

则$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=$____________.

7．设3阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=\dfrac{2}{3}$，则$|2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=$____________.

8．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2,-1)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{\beta}=(1,1,k,3)^{\mathrm{T}}$正交，则数$k=$____________.

9．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{PAP}=$ __________ .

10．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$ __________ .

11．设$\boldsymbol{A}$是3阶非零矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$____________.

12．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-4,5)^{\mathrm{T}}$，若存在不全为零的常数

k_1,k_2,k_3，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则数$a=$____________.

13．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为 0，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$通解

为____________.

14．若矩阵$\boldsymbol{A}$满足$|\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$必有一个特征值为____________.

15．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$正定，则$t$的取值范围

为____________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

17. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，求（1） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$；（2） $\boldsymbol{A}^{2019}$.

18. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(6,8,0,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用所求的极大线性无关组表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-\ x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=5 \\ x_1-\ x_2-\ x_3+4x_4=a \end{cases}$$

当 a 为何值时，方程组无解？有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

22. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，证明：$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 可逆，并求出 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}$