绝密 ★ 考试结束前

全国2021年10月高等教育自学考试

线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明：在本卷中，A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 已知2阶行列式D的第1行元素及其余子式都为a，则D的值为

A. 0　　B. a^2

C. $-a^2$　　D. $2a^2$

2. 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均是$n$阶矩阵，且满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{B}^{-1}=$

A. $\boldsymbol{AC}$　　B. $\boldsymbol{CA}$

C. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$　　D. $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3. 设向量组$(1,1,1)^T$，$(a,1,0)^T$，$(1,b,0)^T$线性相关，则数a,b可取值为

A. $a=0,b=0$　　B. $a=0,b=1$

C. $a=1,b=0$　　D. $a=1,b=1$

4．设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则

A．当 $r=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解

B．当 $r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

C．当 $r=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

D．当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系为

A．相似且合同　　B．相似但不合同

C．不相似但合同　　D．不相似且不合同

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6．行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}（$i,j=1,2$），则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=$

__________.

7．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 3 维列向量，且 3 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=n$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$__________.

8．若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$__________.

9．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行加到第 1 行得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

10．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则数 $a=$__________.

11．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-4,5)^{\mathrm{T}}$，若仅当常数 k_1,k_2,k_3 全为零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 才能成立，则数 a 的取值满足__________.

12．设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为0，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为__________.

13．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$相似，则数$a=$__________.

14．设A为3阶矩阵，α_i为3维非零列向量，且$A\alpha_i=i\alpha_i$（$i=1,2,3$），则$r(A)=$

__________.

15．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2$的正惯性指数为__________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．计算行列式$\begin{vmatrix}1+1&2&3&4\\1&2+\frac{1}{2}&3&4\\1&2&3+\frac{1}{3}&4\\1&2&3&4+\frac{1}{4}\end{vmatrix}$的值.

17．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-8&3&2\\4&-1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求$BA+B^{\mathrm{T}}$.

18．设$A=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足关系式$6A+X=XA$，求$X$.

19．设向量组$\alpha_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,5,-3,-3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(6,17,-9,-9)^{\mathrm{T}}$，求该向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20．求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3=4\\-x_1+4x_2+x_3=16\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$的通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．判定矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$能否相似于对角矩阵，说明理由.

22．求正交变换$x=Qy$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23．设λ_1, λ_2是n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1, \lambda_2$的特征向量，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.